

# 基于SEIR的网络信息传播研究

赵丹玲<sup>1</sup> 霍希<sup>2,4</sup> Chen, Michael<sup>3</sup> 吴建宏<sup>4</sup>

(1 国防科技大学 信息系统与管理学院 湖南 长沙 410073)

(2 Department of Mathematics, Ryerson University, Toronto, Ontario, Canada, M5B2K3)

(3 Mathematics and Statistics Department, York University, Toronto, Ontario, Canada, M3J1P3)

(4 Laboratory for Industrial and Applied Mathematics, York University, Toronto, Ontario, Canada, M3J1P3)

**摘要:** 本文借助SEIR模型描述网络信息的传播, 引入了首页效应对传播的影响, 对模型进行了仿真模拟, 并提出了两则信息竞争首页的模型, 作为研究多则网络信息传播的基础。

**关键词:** SEIR; 信息传播; 首页效应; 竞争

**中图分类号:** 一个即可

**MR分类号:** 至少两个

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1001-9626(n)n

## 0 引言

随着社会网络服务(SNS)的发展以及社交媒体用户的大幅度增加, 越来越多的媒体信息依靠网络用户之间的推送进行传播, 例如信息在微博、微信、人人等社交媒介上被用户转发, 那么这则信息可以被转发用户的“好友”看到, 从而达到传播的目的。在信息的传播过程中, 信息可以有两种被用户看见以及接受的方式, 一种是因为支持的用户多被推送到应用的首页从而面向所有用户, 一种是通过关联好友的转发。研究信息在社交媒体用户之间的传播规律以及首页效应对传播过程的影响, 在广告信息宣传和压制舆论信息等方面都有广泛的应用。

文章“Viral Information Propagation in the Digg Online Social Network”[1]中借助了SIR模型, 描述了信息在Digg网站上的传播过程, 很好地展示了SIR模型在信息传播中的应用, 也表明了流行病传播的数学模型能很好地描述信息在社交网络中的传播过程。本文借鉴了现有的SEIR模型[2]并进行了改进, 首先分别提出了不考虑首页效应和考虑首页效应的传播模型, 对模型的基本再生数进行推导; 然后在假设有两则信息而首页只能容纳一则信息的情况下, 提出了两则信息争夺首页的模型; 最后对所有模型进行了数值模拟并对结果进行了分析和讨论。

## 1 模型的描述和分析

### 1.1 无首页效应的传播模型

对于一则消息的传播,在不考虑首页传播影响的情况下,我们应用与流行病传播模型SEIR类似的定义,将任意时刻 $t$ 的用户分为以下几类:

- (1)  $S(t)$ 代表没有阅读过消息的用户,对应于传染病模型中的易感者;
- (2)  $E(t)$ 代表可以阅读到消息的用户,对应为传染病模型中的暴露者;
- (3)  $I(t)$ 代表转发消息的用户,对应与传染病模型中的感染者;
- (4)  $R(t)$ 为曾经转发过的消息不再被阅读到的用户和阅读但不会转发消息的用户,对应于传染病模型中的恢复者。

那么,无首页效应的传播模型展示如下:

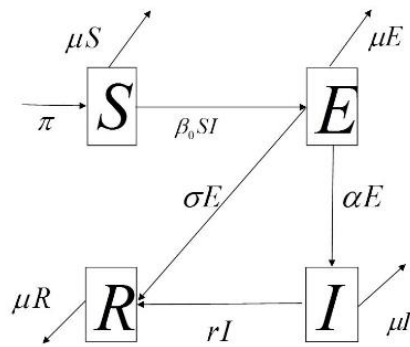


图 1 无首页效应的SEIR传播模型

$$\begin{cases} S' = \pi - \beta_0 SI - \mu S \\ E' = \beta_0 SI - \sigma E - \alpha E - \mu E \\ I' = \alpha E - rI - \mu I \\ R' = rI + \sigma E - \mu R \end{cases} \quad (1)$$

(1) 中的所有参数均非负,定义如下:

表 1 参数的定义

$\pi$	网站用户新增的速率
$\mu$	用户退出网站的速率
$\beta_0$	转发消息的传播率
$\sigma$	阅读者不转发消息的速率
$\alpha$	阅读者转发消息的速率
$r$	阅读者转发过的消息不再产生影响的速率

由于(1)中前三个式子并没有涉及到 $R$ ,因此在进行数学分析时,我们可以独立前三个式子

进行平衡点及稳定性的分析。根据定义，可以解得模型的两个平衡点为： $(S^*, E^*, I^*) = (\frac{\pi}{\mu}, 0, 0)$ 和 $(S^{**}, E^{**}, I^{**}) = (\frac{(\mu+\alpha+\sigma)(r+\mu)}{\beta_0\alpha}, \frac{\pi}{\mu+\alpha+\sigma} - \frac{\mu(r+\mu)}{\beta_0\alpha}, \frac{\alpha\pi}{(\mu+\alpha+\sigma)(r+\mu)} - \frac{\mu}{\beta_0})$ 。

简单平衡点 $(S^*, E^*, I^*)$ 即消息不再被阅读或转发的情况，而复杂平衡点 $(S^{**}, E^{**}, I^{**})$ 是消息始终被阅读及转发的情况。

**引理1** 假设系统(1)所有参数值非负，则平衡点 $(S^*, E^*, I^*) = (\frac{\pi}{\mu}, 0, 0)$ 为渐进稳定平衡点当且仅当 $(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \frac{\alpha\beta_0\pi}{\mu} > 0$ 。

证明：首先在第一个平衡点 $(S^*, E^*, I^*)$ 对系统进行线性化，得到系统在这点的Jacobian矩阵 $J(S^*, E^*, I^*)$ 为：

$$J(S^*, E^*, I^*) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta_0 S^* \\ 0 & -(\sigma + \alpha + \mu) & \beta_0 S^* \\ 0 & \alpha & -r - \mu \end{bmatrix}$$

令 $f^*(\lambda) = \text{Det}|\lambda I - J(S^*, E^*, I^*)|$ ，则有

$$f^*(\lambda) = (\lambda + \mu)[(\lambda + \sigma + \alpha + \mu)(\lambda + r + \mu) - \alpha\beta_0 S^*]$$

显然， $f^*(\lambda)$ 可以展开为一元二项式，我们记为 $f^*(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ 。

根据Routh - Hurwitz criterion[2]，系统在此平衡点处局部渐进稳定当且仅当 $a_0, a_1, a_2 > 0$ 。显然， $a_1$ 和 $a_2$ 均大于0，而要令 $a_0 > 0$ ，必须满足 $(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \frac{\alpha\beta_0\pi}{\mu} > 0$ 。

因此平衡点 $(S^*, E^*, I^*)$ 渐进稳定当且仅当 $(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \frac{\alpha\beta_0\pi}{\mu} > 0$ 。□

同理，分析在第二个平衡点 $(S^{**}, E^{**}, I^{**})$ 处系统的稳定性，我们有：

**引理2** 假设系统(1)所有参数值非负，则平衡点 $(S^{**}, E^{**}, I^{**})$ 为渐进稳定平衡点当且仅当 $(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \frac{\alpha\beta_0\pi}{\mu} < 0$ 。p 证明：首先对系统在第二个平衡点 $(S^{**}, E^{**}, I^{**})$ 处进行线性化，得到系统在这点的Jacobian矩阵 $J(S^{**}, E^{**}, I^{**})$ 为：

$$J(S^{**}, E^{**}, I^{**}) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta_0 I^{**} & 0 & -\beta_0 S^{**} \\ \beta_0 I^{**} & -(\sigma + \alpha + \mu) & \beta_0 S^{**} \\ 0 & \alpha & -r - \mu \end{bmatrix}$$

令 $f^{**}(\lambda) = \text{Det}|\lambda I - JS^{**}E^{**}I^{**}|$ ，则有

$$f^{**}(\lambda) = (\lambda + \mu + \beta_0 I^{**})(\lambda + \sigma + \alpha + \mu)(\lambda + r + \mu) - \alpha\lambda + \mu\beta_0 S^{**}$$

记此三次多项式为 $f^{**}(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ ，根据Routh - Hurwitz criterion[3]，系统在此平衡点处局部渐进稳定当且仅当：

$$(1) a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$$

$$(2) a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

对于条件(1)，显然 $a_1, a_2, a_3 > 0$ ，而

$$\begin{aligned} a_0 &= (\mu + \beta_0 I^*)(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \alpha\mu\beta_0 S^* \\ &= \mu(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) + 2\alpha\beta_0(\sigma + \alpha + \mu)E^{**} - \alpha\beta_0\pi \\ &= \mu(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \alpha\beta_0\pi + 2\alpha\beta_0\pi - 2\mu(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) \\ &= \alpha\beta_0\pi - \mu(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) \end{aligned}$$

因此, 当 $\alpha\beta_0\pi - \mu(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) > 0$ 时,  $a_0 > 0$ 。

对于条件 (2), 为了方便表达, 记 $X = \beta_0 I^* + \mu$ ,  $Y = \sigma + \alpha + \mu$ ,  $Z = \beta_1 + \mu$ , 那么代入 $S^*$ 的值,  $a_1 a_2 - a_0 a_3$ 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_0 a_3 &= [XY + XZ + YZ - \beta_0 S^* \alpha][X + Y + Z] - (XYZ - \beta_0 \mu S^* \alpha) \\ &= (XY + XZ + YZ)(X + Y + Z) - XYZ + \beta_0 \mu S^* \alpha - (X + Y + Z)\beta_0 \alpha \frac{YZ}{\beta_0 \alpha} \\ &= XY(X + Y) + XZ(X + Y + Z) + \beta_0 \mu S^* \alpha > 0 \end{aligned}$$

因此, 当满足条件 $\alpha\beta_0\pi - \mu(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) > 0$ 时, 系统在第二个平衡点渐近稳定。□

引入生物数学中基本再生数的概念[4], 我们可以将此模型的基本再生数 $R_0$ 定义为:

$$R_0 = \frac{\alpha\beta_0\pi}{\mu(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu)}$$

综上所述, 对于系统 (1) 在平衡点处的稳定性, 我们有如下结论:

**定理1** 假设系统 (1) 所有参数非负, 当 $R_0 < 1$ 时, 系统在平衡点 $(S^*, E^*, I^*) = (\frac{\pi}{\mu}, 0, 0)$ 处是渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 系统在平衡点

$$(S^{**}, E^{**}, I^{**}) = \left( \frac{(\mu + \alpha + \sigma)(r + \mu)}{\beta_0 \alpha}, \frac{\pi}{\mu + \alpha + \sigma} - \frac{\mu(r + \mu)}{\beta_0 \alpha}, \frac{\alpha\pi}{(\mu + \alpha + \sigma)(r + \mu)} - \frac{\mu}{\beta_0} \right)$$

处是渐近稳定的。

## 1.2 有首页效应的传播模型

当消息被推送到首页时, 消息可以被全体用户看见。那么与之前模型相比, 此时消息的传播则增加了一个途径, 也就是可以阅读到消息的人以 $\beta_1$ 的速率增加。于是模型如下:

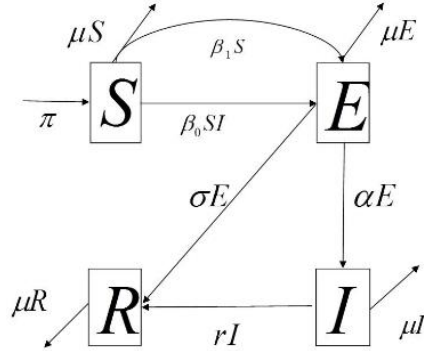


图 2 有首页效应的SEIR传播模型

$$\begin{cases} S' = \pi - \beta_0 SI - \beta_1 S - \mu S \\ E' = \beta_0 SI + \beta_1 S - \sigma E - \alpha E - \mu E \\ I' = \alpha E - rI - \mu I \\ R' = rI + \sigma E - \mu R \end{cases} \quad (2)$$

由于(2)中前三个式子并没有涉及到 $R$ ,同理我们可以独立(2)中前三个式子进行平衡点 $(\bar{I}, \bar{S}, \bar{E})$ 及稳定性分析。 $\bar{I}, \bar{S}, \bar{E}$ 总有如下关系:

$$\bar{I} = \frac{\alpha \bar{E}}{r + \mu}$$

$$\bar{S} = \frac{\pi - (\mu + \alpha + \sigma) \bar{E}}{\mu}$$

$\bar{E}$ 为下式一元二次方程的正数根:

$$\beta_0 \alpha (\mu + \sigma + \alpha) \bar{E}^2 + [(\beta_1 + \mu)(r + \mu)(\mu + \sigma + \alpha) - \beta_0 \pi \alpha] \bar{E} - \beta_1 \pi (r + \mu) = 0$$

从这个一元二次方程可知 $\bar{E}$ 只有一个正数根,也就是这个模型仅存在一个平衡点。此时 $\bar{E}$ 的值为:

$$\bar{E} = \frac{\beta_0 \pi \alpha - (\beta_1 + \mu)(r + \mu)(\mu + \sigma + \alpha) + \sqrt{[(\beta_1 + \mu)(r + \mu)(\mu + \sigma + \alpha) - \beta_0 \pi \alpha]^2 + 4 \beta_0 \alpha (\mu + \sigma + \alpha) \beta_1 \pi (r + \mu)}}{2 \beta_0 \alpha (\mu + \sigma + \alpha)}$$

在平衡点 $(\bar{I}, \bar{S}, \bar{E})$ 处进行线性化,得到系统在这点的Jacobian矩阵 $J(\bar{I}, \bar{S}, \bar{E})$ 为:

$$J(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta_0 \bar{I} - \beta_1 & 0 & -\beta_0 \bar{S} \\ \beta_0 \bar{I} + \beta_1 & -(\sigma + \alpha + \mu) & \beta_0 \bar{S} \\ 0 & \alpha & -r - \mu \end{bmatrix}$$

令 $\bar{f}(\lambda) = \text{Det}p|\lambda I - J\bar{S}\bar{E}\bar{I}|$ , 则有

$$\bar{f}(\lambda) = (\lambda + \beta_0 \bar{I} + \beta_1 + \mu)(\lambda + \sigma + \alpha + \mu)(\lambda + r + \mu) - \alpha \beta_0 \bar{S}(\lambda + \mu)$$

同样记 $\bar{f}(\lambda) = a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ 。我们有如下结论:

**引理3** 假设系统(2)中所有参数值为非负,则当 $\bar{f}(\lambda)$ 满足Routh-Hurwitz条件[3],即 $a_3, a_2, a_1, a_0 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3$ 时,  $(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I})$ 为系统(2)的渐进稳定平衡点。

证明:显然,  $a_3, a_2, a_0 > 0$ , 对于 $a_1$ 则有

$$a_1 = (\beta_0 \bar{I} + \beta_1 + \mu)(\sigma + \alpha + \mu) + (\beta_0 \bar{I} + \beta_1 + \mu)(r + \mu) + (\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \alpha \beta_0 \bar{S}$$

$$> (\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \alpha \beta_0 \bar{S}$$

$$= (\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \frac{\alpha \beta_0 \pi}{\mu} + \frac{\alpha \beta_0 (\sigma + \alpha + \mu) \bar{E}}{\mu}$$

当 $(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \frac{\alpha \beta_0 \pi}{\mu} \geq 0$ 时,  $a_1 > 0$ 。

当 $(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \frac{\alpha \beta_0 \pi}{\mu} < 0$ 时, 要证明 $a_1 > 0$ , 则要证明 $\alpha \beta_0 (\sigma + \alpha + \mu) \bar{E} > \alpha \beta_0 \pi - \mu(\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu)$ 。记:

$$\text{sqrt} = \sqrt{[(\beta_1 + \mu)(r + \mu)(\mu + \sigma + \alpha) - \beta_0 \pi \alpha]^2 + 4 \beta_0 \alpha (\mu + \sigma + \alpha) \beta_1 \pi (r + \mu)}$$

将 $\bar{E}$ 表达式代入, 不等式变为

$$\alpha \beta_0 \pi - \mu(r + \mu)(\mu + \sigma + \alpha) + \beta_1(r + \mu)(\mu + \sigma + \alpha) < \text{sqrt}$$

由于左右两边均为非负数, 可以同时平方, 整理后得到:

$$-2 \beta_1 \mu (r + \mu)^2 (\mu + \sigma + \alpha)^2 < 2 \beta_1 \mu (r + \mu)^2 (\mu + \sigma + \alpha)^2$$

显然这个式子成立, 即 $a_1 > 0$ 成立。

综上所述,  $a_1 > 0$ 在任何情况下成立。

下面证明 $a_1 a_2 > a_0 a_3$ 。

$$a_1 = (\beta_0 \bar{I} + \beta_1 + \mu)(\sigma + \alpha + \mu) + (\beta_0 \bar{I} + \beta_1 + \mu)(r + \mu) + (\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \alpha \beta_0 \bar{S}$$

$$> (\sigma + \alpha + \mu)(r + \mu) - \alpha \beta_0 \bar{S} > 0$$

记  $X^* = \beta_0 I^* + \beta_1 + \mu, Y^* = \mu + \sigma + \alpha, Z^* = r + \mu$ , 那么  $a_1 > X^* Y^* + X^* Z^*$  恒成立。

由表达式知  $a_2 = X^* + Y^* + Z^*$ , 而  $a_0 = X^* Y^* Z^* - \alpha \beta_0 \mu S^* < X^* Y^* Z^*$ 。显然  $a_1 a_2 > X^* Y^* Z^*$ , 故  $a_1 a_2 > a_0 a_3$  得证。□

根据Routh - Hurwitz criterion[3], 加入首页效应影响的模型在其平衡点处是渐进稳定的。于是我们有如下结论:

**定理2** 假设系统(2)中所有参数值为非负, 则系统(2)有唯一平衡点  $(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I})$ , 且此平衡点渐进稳定。

### 1.3 有、无首页效应的传播模型的关系

显然, 模型(1)是模型(2)的一个特例。即当  $\beta_1 \rightarrow 0$  时, 模型(2)便回归到(1)中的无首页效应的模型。下面研究  $\beta_1$  和  $R_0$  对于消息影响力的关系。

将  $\bar{I}$  的表达式写成带有  $R_0$  的形式, 得到

$$\bar{I} = \frac{\mu R_0 - (\beta_1 + \mu) + \sqrt{(\beta_1 + \mu)^2 + (\mu R_0)^2 + 2\mu R_0(\beta_1 - \mu)}}{2\beta_0}$$

当  $\beta_1 \rightarrow 0$  时,

$$\bar{I} = \frac{\mu(R_0 - 1) + \mu\sqrt{(R_0 - 1)^2}}{2\beta_0}$$

因此当  $R_0 < 1$  时,  $\bar{I} = 0$ , 这就是无首页效应的模型中在第一个平衡点的情况。而当  $R_0 > 1$  时,  $\bar{I} = \frac{\mu(R_0 - 1)}{\beta_0}$ , 这就是无首页效应的模型在第二个平衡点的情况。下图为  $\bar{I}(R_0)$  的函数图像。

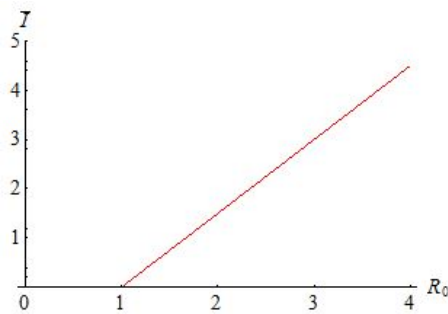


图3  $\beta_0=0.2, \mu=0.3$ 时  $\bar{I}(R_0)$  的函数图像

接着讨论  $\bar{I}$  与  $\beta_1$  之间的关系。下图分别是在  $R_0 < 1$  和  $R_0 > 1$  条件下的  $\bar{I}(\beta_1)$  函数图像。

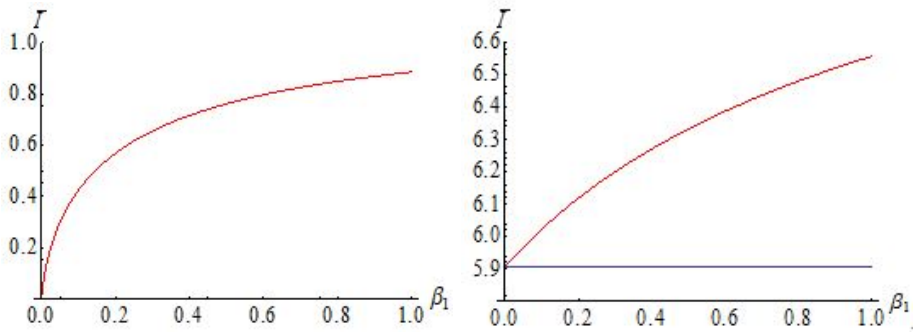


图 4 左图为 $\mu=0.3, \beta_0=0.2, R_0 = 0.74$ 时 $\bar{I}(\beta_1)$ 的图像, 右图中红色为 $\mu=0.3, \beta_0=0.2, R_0 = 4.93$ 时 $\bar{I}(\beta_1)$ 的图像, 蓝色为 $\bar{I} = \frac{\mu(R_0-1)}{\beta_0}$ 的图像

当给定一则信息在传播过程中的其他参数, 我们可以通过首页效应的力度来调整信息传播的范围。比如说在右图给定的参数下, 若要求系统中至少稳定有6名用户转发信息, 根据函数图像可以得到 $\beta_1$ 至少需要大于0.1。

#### 1.4 争夺首页的传播模型

在实际中, 首页上的消息是会根据不同消息的支持者数量进行更换的, 于是很有必要讨论多则消息争夺首页版面的情况。下面先讨论一共有两则消息, 而首页只能推送一则消息的情况。

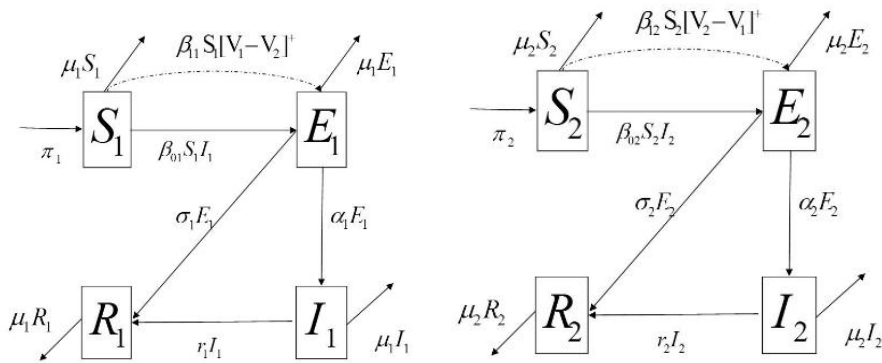


图 5 两则消息竞争首页的模型

于是我们有两条消息竞争首页的动力系统模型:

$$\begin{cases} S_1'(t) = \pi_1 - \beta_{01}S_1(t)I_1(t) - \beta_{11}S_1(t)[V_1(t) - V_2(t)]^+ - \mu_1S_1(t) \\ E_1'(t) = \beta_{01}S_1(t)I_1(t) + \beta_{11}S_1(t)[V_1(t) - V_2(t)]^+ - \sigma_1E_1(t) - \alpha_1E_1(t) - \mu_1E_1(t) \\ I_1'(t) = \alpha_1E_1(t) - r_1I_1(t) - \mu_1I_1(t) \\ R_1'(t) = r_1I_1(t) + \sigma_1E_1(t) - \mu_1R_1(t) \\ V_1'(t) = \alpha_1E_1(t) \\ S_2'(t) = \pi_2 - \beta_{02}S_2(t)I_2(t) - \beta_{12}S_2(t)[V_2(t) - V_1(t)]^+ - \mu_2S_2(t) \\ E_2'(t) = \beta_{02}S_2(t)I_2(t) + \beta_{12}S_2(t)[V_2(t) - V_1(t)]^+ - \sigma_2E_2(t) - \alpha_2E_2(t) - \mu_2E_2(t) \\ I_2'(t) = \alpha_2E_2(t) - r_2I_2(t) - \mu_2I_2(t) \\ R_2'(t) = r_2I_2(t) + \sigma_2E_2(t) - \mu_2R_2(t) \\ V_2'(t) = \alpha_2E_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $S_i, E_i, I_i, R_i, i = 1, 2$  分别代表消息  $i$  的传播系统中, 相同于系统 (1), (2) 相应的用户类型。  $V_i(t), i = 1, 2$ , 表示曾经转发过消息  $i$  的所有用户数量, 而  $[V_1(t) - V_2(t)]^+$  定义为:

$$[V_1(t) - V_2(t)]^+ = \begin{cases} 1, & V_1(t) > V_2(t) \\ 0, & V_1(t) \leq V_2(t) \end{cases}$$

举例来说, 当消息 1 的累积转发数多于消息 2 时, 则消息 1 会被推送到首页, 其传播途径就多了  $\beta_{11}S$  这一部分, 与此同时, 消息 2 则失去通过首页传播的机会。

## 2 仿真模拟

### 2.1 无首页效应的模型模拟

首先模拟  $R_0 < 1$  时的情况, 则可得到  $I(t)$  的函数图像:

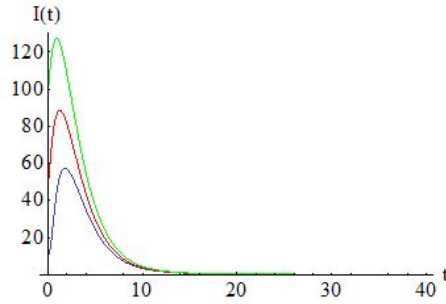


图 6 当  $\beta_0 = 0.2, \sigma = 0.3, \gamma = 0.2, \pi = 5, \mu = 0.3, \alpha = 0.1$  时,  $R_0 = 0.83$ , 绿线是  $S(0) = 1000, E(0) = 30, I(0) = 10, R(0) = 0$  的函数图像, 红线是  $S(0) = 1000, E(0) = 150, I(0) = 50, R(0) = 0$  的函数图像, 蓝线是  $S(0) = 1000, E(0) = 300, I(0) = 100, R(0) = 0$  的函数图像。

从图 6 可知, 经过一段时间, “感染者” 的人数会趋向于 0, 也就是说在  $R_0 < 1$  的情况下, 消息的影响不会一直持续, 最终会消失。



若 $R_0 > 1$ 时,可以得到:

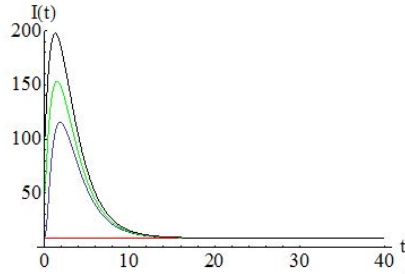


图 7 当 $\beta_0 = 0.2, \sigma = 0.3, \gamma = 0.2, \pi = 20, \mu = 0.3, \alpha = 0.2$ 时,  $R_0 = 6.67$ ,黑线是 $S(0) = 1000, E(0) = 30, I(0) = 10, R(0) = 0$ 的函数图像, 绿线是 $S(0) = 1000, E(0) = 150, I(0) = 50, R(0) = 0$ 的函数图像, 蓝线是 $S(0) = 1000, E(0) = 300, I(0) = 100, R(0) = 0$ 的函数图像, 红线是 $I(t) = \frac{\alpha\pi}{(\mu+\alpha+\sigma)(r+\mu)} - \frac{\mu}{\beta_0}$ 是图像, 即 $I^{**}$ 的值。

当 $R_0 > 1$ 时, 经过一段时间后, 转发新闻的人数趋向于 $I^{**}$ 这个值, 系统稳定。也就是说, 在这种情况下, 消息的影响一直存在, 经过一段时间稳定后总有 $I^{**}$ 用户受到影响。

## 2.2 有首页效应的模型模拟

引入首页效应后, 相当于是加入了传播源。也就是说消息的传播不再单纯是仅通过用户之间的传播, 还可以通过首页这个源头传播给所有用户。

分别模拟 $R_0 < 1$ 和 $R_0 > 1$ 的情况, 得到 $I(t)$ 的函数图像如图8所示:

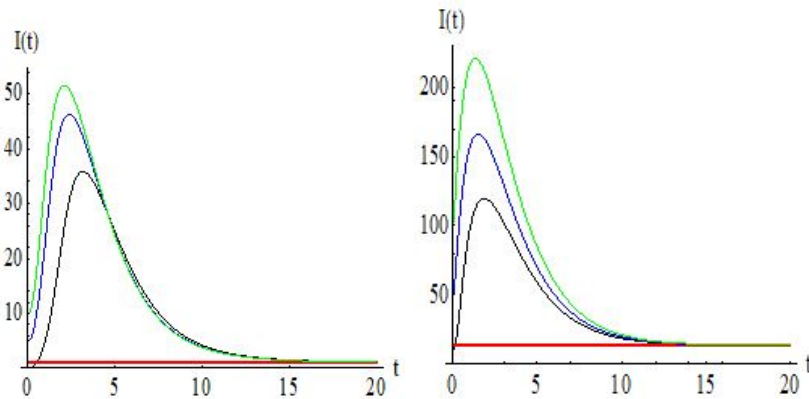


图 8 左图为当 $\beta_0 = 0.1, \beta_1 = 0.1, \sigma = 0.3, \gamma = 0.3, \pi = 12, \mu = 0.3, \alpha = 0.1$ 时,  $R_0 = 0.95$  绿线是 $S(0) = 1000, E(0) = 0, I(0) = 0, R(0) = 0$  蓝线是 $S(0) = 1000, E(0) = 10, I(0) = 5, R(0) = 0$  黑线是 $S(0) = 1000, E(0) = 20, I(0) = 10, R(0) = 0$  红线是 $I(t) = \bar{I}$ 的图像,右图为当 $\beta_0 = 0.2, \beta_1 = 0.1, \sigma = 0.3, \gamma = 0.2, \pi = 30, \mu = 0.3, \alpha = 0.2$ 时,  $R_0 = 10$ 绿线是 $S(0) = 1000, E(0) = 50, I(0) = 10, R(0) = 0$ 蓝线是 $S(0) = 1000, E(0) = 250, I(0) = 50, R(0) = 0$ 黑线是 $S(0) = 1000, E(0) = 500, I(0) = 100, R(0) = 0$ 红线是 $I(t) = \bar{I}$ 的图像

当 $R_0$ 为任意值时,经过一段时间后,仍有 $\bar{I}$ 人在转发消息,从而对消息进行传播。也就是说,只要存在首页效应,消息的影响就不可能消失。所以,若要完全抑制消息的影响,必须保证其不在首页上。

### 2.3 两则信息争夺首页的传播模型模拟

在实际生活中,经常会有这样的情况:有一些错误的舆论消息会传播出来,被用户阅读并且被用户转发,从而使得舆论消息在网络上传播。在发现这个情况后,相关的部门往往需要通过发布另一则消息来纠正之前的错误舆论。下面我们研究这样的场景:当消息1已经拥有较多的支持者并且被推送到首页后,刚开始获得较少支持的信息2是否能够超越信息1的影响,竞争发布在首页的位置,从而达到掩盖和纠正信息1的影响。

对于一个网站来说,新注册的用户数量和注销退出的用户数量对于不同信息来说没有差异,故认为 $\pi_1 = \pi_2, \mu_1 = \mu_2$ 。而用户首页信息的刷新速率,即 $\gamma$ ,主要取决于用户及其好友的活跃程度,故我们假设 $\gamma_1 = \gamma_2$ 。那么,在考虑模型时只需要考虑另外的三个参数的值。于是我们设定 $V_1(0) = 50, V_2(0) = 10$ ,得到以下几种情况下 $V(t)$ 的变化。

(1)  $\beta_{02} > \beta_{01}$

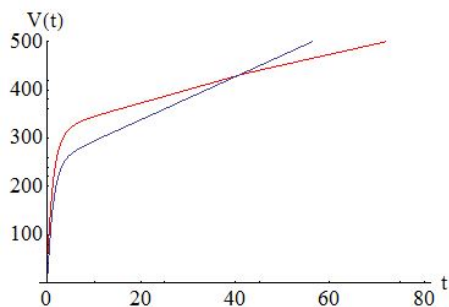


图 9 当 $\beta_{1i} = 0.1, \sigma_i = 0.2, \alpha_i = 0.2, \gamma_i = 0.3, \pi_i = 20, \mu_i = 0.4(i = 1, 2)$ 时,红线为 $\beta_{01} = 0.1, S_1(0) = 1000, E_1(0) = 100, I_1(0) = 50, R_1(0) = 0, V_1(0) = 50$ 时 $V(t)$ 的图像,蓝线为 $\beta_{02} = 0.5, S_2(0) = 1000, E_2(0) = 20, I_2(0) = 10, R_2(0) = 0, V_2(0) = 10$ 时 $V(t)$ 的图像

当 $\beta_{02} > \beta_{01}$ ,相当于增加未阅读新闻的用户可以阅读新闻的机会,主要取决于转发新闻的用户的好友数量。转发消息2的人需要比转发消息1的人拥有更多的好友,这样消息2才能有更大的可能被更多人看到,从而提高支持消息2的用户数量。因此在实际传播过程中,我们可以借助一些“大V”用户转发消息,高效而广泛地传播消息。

(2)  $\sigma_2 < \sigma_1$

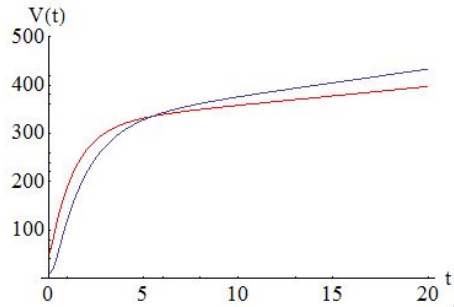


图 10 当 $\beta_{i0} = 0.2, \beta_{i1} = 0.2, \alpha_i = 0.2, \gamma_i = 0.4, \pi_i = 20, \mu_i = 0.3 (i = 1, 2)$ 时, 红线为 $\sigma_1 = 0.3, S_1(0) = 1000, E_1(0) = 100, I_1(0) = 50, R_1(0) = 0, V_1(0) = 50$ 时 $V(t)$ 的图像, 蓝线为 $\sigma_2 = 0.1, S_2(0) = 1000, E_2(0) = 20, I_2(0) = 10, R_2(0) = 0, V_2(0) = 10$ 时 $V(t)$ 的图像

对于可以看见这两则消息的人来说, 更少阅读消息2的用户选择了不支持该信息, 从而使得较小比例的 $E_2$ 流入 $R_2$ 的群体。因此选择拥有较多观念相近的朋友的用户转发消息, 使消息传播的可能性更大, 因为这些好友之间产生的分歧较少, 不支持该信息的用户也较少。

(3)  $\alpha_2 > \alpha_1$

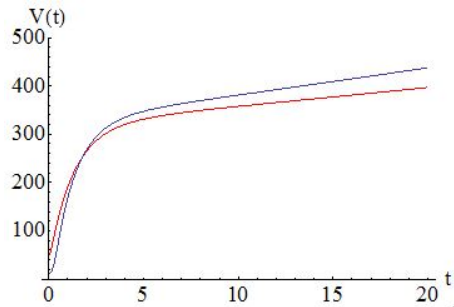


图 11 当 $\beta_{i0} = 0.2, \beta_{i1} = 0.2, \sigma_i = 0.3, \gamma_i = 0.4, \pi_i = 20, \mu_i = 0.3 (i = 1, 2)$ 时, 红线为 $\alpha_1 = 0.2, S_1(0) = 1000, E_1(0) = 100, I_1(0) = 50, R_1(0) = 0, V_1(0) = 50$ 时 $V(t)$ 的图像, 蓝线为 $\alpha_2 = 0.3, S_2(0) = 1000, E_2(0) = 20, I_2(0) = 10, R_2(0) = 0, V_2(0) = 10$ 时 $V(t)$ 的图像

$\alpha$ 的值的大小主要取决于消息本身的内容。若是消息的内容是被大多数人认同的, 那么只要看到消息的用户很有可能就会转发该信息, 从而加快消息的传播。所以提高消息2的可信度和权威性, 是快速扩大其影响力的有效途径。也就是说, 正确的、有道理的消息总是容易被大家接受的。

### 3 总结讨论

本文在SEIR模型的基础上进行了改动, 用传统的传染病动力学的方法研究信息的传播, 很好地将SEIR模型应用于网络信息传播中。更值得关注的是, 在传播过程中引进的首页效应, 可以与传染病传播中的传染源很好地结合起来, 对传播过程进行解释。在本文模型中, 首页效应

相当于流行病中的传染源，比如说SARS的传染源，果子狸或者是埃博拉病毒的传染源，猴子、大猩猩或者果蝠等。我们的分析结果表明，在流行病（如SARS，埃博拉病毒等）的控制中，人们除了要通过疾病控制手段而得到较小的基本再生数，使得 $R_0 < 1$ ，更重要的是要切断动物传染源。而在网络信息传播时，若要抑制信息的扩散，我们也可以利用其它手段控制使得 $R_0 < 1$ ，同时需要切断其“传染源”，即将信息从首页撤下。相反，若是要增加信息的扩散量，例如寻人启示、广告等信息，那么可以通过文中分析的方法，利用其他控制手段使得 $R_0 > 1$ 并将消息推送到首页上。

通过研究信息在社交网络中的传播过程，我们对其传播规律有了较好的认识。在社交网络高速发展的信息时代，信息传播成为了一个值得研究的课题，而对信息传播的控制也是一个值得深入探讨的问题。而我们研究的有首页效应和无首页效应的传播模型，以及两条消息竞争首页的模拟，可以作为研究此类问题的基础。

### 参 考 文 献

- [1] Freeman M, McVittie J, Sivak I, et al. Viral information propagation in the Digg online social network[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2014.
- [2] Li, Michael Y., and James S. Muldowney. "Global stability for the SEIR model in epidemiology." *Mathematical biosciences* 125.2 (1995): 155-164.
- [3] Anagnost J J, Desoer C A. An elementary proof of the Routh-Hurwitz stability criterion[J]. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 1991, 10(1): 101-114.
- [4] Brauer F, Van den Driessche P. *Mathematical epidemiology*[M]. Springer, 2008.

## The Diffusion of Online Content Based On SEIR Model

Danling Zhao<sup>1</sup> Xi Huo<sup>2,4</sup> Chen, Michael<sup>3</sup> Jianhong Wu<sup>4</sup>

(1 *The department of Information System and Management, National University and Defence Teconology, Changsha, Human, 410073, China*)

(2 *Department of Mathematics, Ryerson University, Toronto, Ontario, Canada, M5B2K3*)

(3 *Mathematics and Statistics Department, York University, Toronto, Ontario, Canada, M3J1P3*)

(4 *Laboratory for Industrial and Applied Mathematics, York University, Toronto, Ontario, Canada, M3J1P3*)

**Abstract:** We apply the SEIR model as in epidemic disease modeling to investigate the transmission dynamics of the spread of news online via different website functions, such as sharing, like, and headline effects. Aside of the mathematical analysis, we also perform simulations about the competition for headline position between two news in order to get insights about how the spread of a new message replaces that of an old message due to headline effects. Our study could be a starting point for developing a more realistic model about the online transmission dynamics of multiple messages.

**Key words:** SEIR; Information diffusion; The influence of home page; Compete