第30卷 第3期 数学学报 Vol. 30, No. 3
1987年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA May, 1987

有界连续函数空间上无穷滞后中立型泛函微分方程的局部理论与稳定性*

吴建宏
(湖南大学)

本文在适当的 Caratheodory 条件下讨论有界连续函数空间上无穷滞后中立型方程的局部理论，并针对中立型积分微分方程的特点引入关于某个楔函数稳定的D算子概念，结合 Ляпунов 第二方法，研究这类方程的稳定性。

§1. 局部理论

设 $\mathscr{D}$ 为 R^n 中开集，$BC((-\infty, 0], \mathscr{D})$ 为定义于 $(-\infty,0]$ 而取值在 $\mathscr{D}$ 中的有界连续函数全体. 考虑系统

$$\frac{d}{dt}[x(t)-G(t, x_t)]=F(t, x_t) \tag{1.1}$$

其中 $x\in R^n$, $t\in[\alpha, \beta)$, G, $F:[\alpha, \beta)\times BC((-\infty, 0], \mathscr{D})\to R^n$. 称连续函数 x: $(-\infty, t_0+A)\to\mathscr{D}$(其中 $t_0\in[\alpha,\beta)$, $A\in(0, \beta-t_0)$)为方程(1.1)过$(t_0,\varphi)\in[\alpha, \beta)\times BC((-\infty,0],\mathscr{D})$的解(记为 $x(t; t_0, \varphi)$). 若 $x_{t_0}=\varphi$, $x(t)-G(t, x_t)$ 于 $[t_0, t_0+A)$ 上绝对连续, $F(t, x_t)$于 $[t_0, t_0+A)$ 上可积, 且在 $[t_0, t_0+A)$ 上, (1.1)几乎处处成立.

对给定 $(t_0,\varphi)\in[\alpha, \beta)\times BC((-\infty, 0], \mathscr{D})$ 及 $\delta,\gamma>0$, 定义

$A(t_0, \varphi, \delta, \gamma)=\{x: x\in C((-\infty, t_0+\delta], R^n), x_{t_0}=\varphi, |x(t)-\varphi(0)|\leqslant\gamma, t\in[t_0, t_0+\delta]\}$ 我们假设: 对任意 $(t_0, \varphi)\in[\alpha, \beta)\times BC((-\infty, 0), \mathscr{D})$, 存在 δ, $\gamma>0$, 可积函数 $m:[t_0, t_0+\delta]\to[0,+\infty)$及常数 $k\in[0,1)$, 使$(H1)$: 对任意$x\in A(t_0, \varphi, \delta, \gamma)$, $t\in[t_0, t_0+\delta]$, $G(t, x_t)$ 关于 t 连续,

$F(t, x_t)$ 关于 t 可测且 $|F(t, x_t)|\leqslant m(t)$;

$(H2)$: 对任意 x, $y\in A(t_0, \varphi,\delta, \gamma)$, 当 $t\in[t_0, t_0+\delta]$ 时, 有

$$|G(t, x_t)-G(t, y_t)|\leqslant k\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}|x(s)-y(s)|,$$

而当 $\sup\limits_{t_0\leqslant s\leqslant t_0+\delta}|x(s)-y(s)|\to 0$ 时, $\int_{t_0}^{t_0+\delta}|F(s, x_s)-F(s, y_s)|ds\to 0$.

定理1 (存在性) 若 $(H1)$, $(H2)$ 成立, 则对任意 $(t_0, \varphi)\in[\alpha, \beta)\times BC((-\infty, 0], \mathscr{D})$, 存在方程 (1.1) 过 (t_0, φ) 的解.

证 对 $(t_0, \varphi)\in[\alpha, \beta)\times BC((-\infty,0], \mathscr{D})$及 $\delta, \gamma>0$, 定义

$E(\delta, \gamma)=\{x\in C([t_0, t_0+\delta], R^n); x(t_0)=\varphi(0), \sup_{t_0\leqslant s\leqslant t_0+\delta}|x(s)-\varphi(0)|\leqslant$

* 1985年3月14日收到, 1985年10月29日收到此精简稿.

$\gamma\}$. 不妨设 δ,γ 充分小，使 $(H\,1)$, $(H\,2)$ 成立, $\{x: |x-\varphi(0)| \leqslant \gamma\} \leqslant \mathscr{D}$ 且

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} m(t)dt \leqslant \frac{1-k}{2}\gamma, \quad \sup_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+\delta} |G(t, \tilde{\varphi}_t) - G(t_0, \varphi)| \leqslant \frac{1-k}{2}\gamma,$$

其中 $\tilde{\varphi}_{t_0} = \varphi$ 且当 $t \geqslant t_0$ 时 $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(0)$.

对任给 $x \in E(\delta,\gamma)$, 定义 $\hat{x} \in BC((-\infty, t_0+\delta], \mathscr{D})$ 为 $\hat{x}_{t_0} = \varphi$ 且当 $t \geqslant t_0$ 时, $\hat{x}(t) = x(t)$. 在 $E(\delta,\gamma)$ 上定义映射 T, T_1, T_2 为

$$(Tx)(t) = G(t, \hat{x}_t) + \varphi(0) - G(t_0, \varphi) + \int_{t_0}^{t} F(s, \hat{x}_s)ds,$$

$$(T_1x)(t) = G(t, \hat{x}_t) - G(t_0, \varphi),$$

$$(T_2x)(t) = \varphi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, \hat{x}_s)ds, \quad x \in E(\delta, \gamma), \quad t \in [t_0, t_0+\delta].$$

则 $T_1 + T_2 = T$ 且不难验证 T 是 $E(\delta, \gamma)$ 到自身的映射. 由 $(H\,1)$, $(H\,2)$ 知 T_2 为连续算子, T_1 为压缩映射，且

$$|(T_2x)(t)| \leqslant |\varphi(0)| + \frac{1-k}{2}\gamma, \quad t \in [t_0, t_0+\delta],$$

$$|(T_2x)(t_1) - (T_2x)(t_2)| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} m(s)ds\right|, \quad t_1, t_2 \in [t_0, t_0+\delta].$$

故 $\{T_2x;\ x \in E(\delta, \gamma)\}$ 为一致有界、等度连续，即 T_2 为全连续算子，从而 T 是 $E(\delta, \gamma)$ 上 α——压缩映射. 由 Darbo 定理知 T 在 $E(\delta, \gamma)$ 上有不动点，即 (1.1) 过 (t_0, φ) 的解于 $[t_0, t_0+\delta]$ 上存在，证毕.

定理 2 (Osgood 型唯一性)　设 $(H\,1)$, $(H\,2)$ 成立，且对任意 $(t_0, \varphi) \in [\alpha, \beta) \times BC((-\infty, 0], \mathscr{D})$, 存在 δ、$\gamma > 0$ 及 $V \in C([t_0, t_0+\delta] \times [0, 2\gamma], R^+)$, $V(t, 0) = 0$, 使当 $x, y \in A(t_0, \varphi, \delta, \gamma)$ 时,

$$|F(t, x_t) - F(t, y_t)| \leqslant V(t, \sup_{t_0\leqslant s\leqslant t} |x(s) - y(s)|). \tag{1.2}$$

若方程 $\dot{z}(t) = V(t, z(t))/(1-k)$ 过 $(t_0, 0)$ 的解 $z(t; t_0, 0) \equiv 0$, 则方程 (1.1) 过 (t_0, φ) 的解唯一.

证　设 $x(t)$, $y(t)$ 均为方程 (1.1) 过 (t_0, φ) 定义于 $[t_0, t_0+\delta]$ 上的解. 不妨设 δ, γ 充分小，使 $(H\,1)$, $(H\,2)$, (1.2) 成立，且当 $t \in [t_0, t_0+\delta]$ 时, $|x(t) - \varphi(0)| \leqslant \gamma$. 令 $m(t) = \sup_{t_0\leqslant s\leqslant t} |x(s) - y(s)|$. 由 (1.2), 不难验证 $m(t) \leqslant km(t) + \int_{t_0}^{t} V(s, m(s))ds$, 从而 $\dot{m}(t) \leqslant \dfrac{V(t, m(t))}{1-k}$, 又 $m(t_0) = 0$, 故 $m(t) \leqslant z(t; t_0, 0) \equiv 0$, 所以 $x(t) \equiv y(t)$, 即方程 (1.1) 过 (t_0, φ) 的解唯一，证毕.

定理 3 (Borisovič-Turbabin 型唯一性)　设 $(H\,1)$, $(H\,2)$ 成立且对任给 $(t_0, \varphi) \in [\alpha, \beta) \times BC((-\infty, 0], \mathscr{D})$, 存在 δ、$\gamma > 0$ 及连续函数 $g: [t_0, t_0+\delta] \to [0, \infty)$, $g(t_0) = 0$, 使当 x, $y \in A(t_0, \varphi, \delta, \gamma)$ 时,

$$\left|\int_{t_0}^{t} [F(s, x_s) - F(s, y_s)]ds\right| \leqslant g(t) \sup_{t_0\leqslant s\leqslant t} |x(s) - y(s)|$$

则方程 (1.1) 过 (t_0, φ) 的解唯一.

证　设 $x(t)$, $y(t)$ 是方程 (1.1) 过 (t_0, φ) 定义于 $[t_0, t_0+\delta]$ 上的解，不妨设

$$\sup_{t_0\leq s\leq t_0+\delta} g(s) < 1-k.$$

同定理 2 的证明知 $m(t) \leq [k + \sup_{t_0\leq s\leq t_0+\delta} g(s)]\ m(t)$，因为 $k+\sup_{t_0\leq s\leq t_0+\delta} g(s) < 1$，故 $m(t)\equiv 0$，从而 $x\equiv y$，证毕.

定理 4（延展性） 设对 $\mathscr{D}$ 中任意有界集 W，有

$(H3)$: 存在局部可积函数 $m:[\alpha,\beta)\to[0,\infty)$，使对任意 $b\in[\alpha,\beta)$，$x\in C((-\infty,b),W)$ 及 $t\in[\alpha,b)$，$F(t,x_t)$ 关于 t 可测且 $|F(t,x_t)|\leq m(t)$；

$(H4)$: 存在常数 $r_1\geq r_2>0$ 及非负连续函数 $K_1(t_1,t_2)$，$K_2(t_1,t_2,u)$，$K_3(t_1,t_2,u)$，$(t_1,t_2\in[\alpha,\beta),u\geq 0)$，满足 $K_2(t_1,t_2,0)=0$，$\lim_{t_1-t_2\to 0} K_3(t_1,t_2,u)=0\ (u>0)$，使对任意 $b\in[\alpha,\beta)$ 及 $x\in C((-\infty,b),W)$，当 $t_1,t_2\in[\alpha,b)$ 时，

$$\begin{aligned}|G(t_1,x_{t_1})-G(t_2,x_{t_2})| &\leq K_1(t_1,t_2)\sup_{-r_1\leq\theta\leq -r_2}|x(t_1+\theta)-x(t_2+\theta)|\\ &+K_2(t_1,t_2,u)\sup_{-u\leq\theta\leq 0}|x(t_1+\theta)-x(t_2+\theta)|+K_3(t_1,t_2,u)\end{aligned}\tag{1.3}$$

若 $x(t)$ 是方程(1.1)过 (t_0,φ) 定义于 $(-\infty,t_0+\delta)$上不可延拓解，则对 $\mathscr{D}$ 中任意有界闭集 W，存在 $t'\in[t_0,t_0+\delta)$，使 $x(t')\notin W$.

证 若不然，存在有界闭集 $W\subseteq\mathscr{D}$，使当 $t\in[t_0,t_0+\delta)$时，$x(t)\in W$. 由 x 的不可延展性及存在定理 1 知 $x(t)$ 于 $[t_0,t_0+\delta)$ 上不一致连续，则存在 $\varepsilon_0>0$ 及序列 $t_k\to(t_0+\delta)^-(k\to\infty$ 时$)$，$\Delta_k\to 0^+(k\to\infty$ 时$)$，使 $|x(t_k)-x(t_k-\Delta_k)|\geq\varepsilon_0$. 令

$$s_k=\inf\left\{s\in\left[t_0+\frac{\delta}{2},\ t_0+\delta\right);\ |x(s)-x(s-\Delta_k)|\geq\varepsilon_0\right\},$$

则 $|x(s_k)-x(s_k-\Delta_k)|\geq\varepsilon_0$. 取 $\delta_0>0$，$\delta_1>0$，$u\in\left(0,\frac{\delta}{2}\right)$，使

$$\begin{cases}|x(t)-x(s)|<\dfrac{\varepsilon_0}{4\max\limits_{t_0\leq u,v\leq t_0+\delta}K_1(u,v)},\ t,s\in\left[t_0+\dfrac{\delta}{2}-r_1,\ t_0+\delta-r_2\right],\ |t-s|<\delta_0;\\ |x(t)-x(s)|<\varepsilon_0,\ t\in\left[t_0,\ t_0+\dfrac{\delta}{2}\right],\ |t-s|<\delta_1;\\ \sup\limits_{t_0\leq t,s\leq t_0+\delta}K_2(t,s,u)<\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

再取 K 充分大，使当 $k\geq K$ 时，$\Delta_k<\min\{\delta_0,\delta_1,r_1\}$，$K_3(s_k,s_k-\Delta_k,u)<\dfrac{\varepsilon_0}{4}$，$\int_{s_k-\Delta_k}^{s_k} m(s)\,ds<\dfrac{\varepsilon_0}{4}$. 从而

$$\begin{cases}K_1(s_k,s_k-\Delta_k)\sup\limits_{-r_1\leq\theta\leq -r_2}|x(s_k+\theta)-x(s_k-\Delta_k+\theta)|<\dfrac{\varepsilon_0}{4},\\ K_2(s_k,s_k-\Delta_k,u)\sup\limits_{-u\leq\theta\leq 0}|x(s_k+\theta)-x(s_k-\Delta_k+\theta)|<\dfrac{\varepsilon_0}{4}.\end{cases}$$

代入(1.1)及(1.3)中得 $|x(s_k-\Delta_k)-x(s_k)|<\varepsilon_0$，这与 $|x(s_k)-x(s_k-\Delta_k)|\geq\varepsilon_0$ 矛盾，证毕.

定理 5（连续依赖性）　设 $(H1)$—$(H4)$ 成立，并设 $(H5)$：若 x_2，$x\in BC((-\infty,\beta),\mathscr{D})$ 且对某个 $t\in[\alpha,\beta)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-\infty<s\leqslant t}$

$|x_n(s)-x(s)|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}G(t,x_{nt})=G(t,x_t)$，$\lim\limits_{n\to\infty}F(t,x_{nt})=F(t,x_t)$.

设 $x(t;t_0,\varphi)$ 是方程(1.1)过 (t_0,φ) 定义于 $(-\infty,t_0+A]$ 上的唯一解，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使当 $0\leqslant\tilde{t}_0-t_0<\delta(\varepsilon)$，$\tilde{\varphi}\in BC((-\infty,0],\mathscr{D})$，$\sup\limits_{\theta\leqslant 0}|\tilde{\varphi}(\theta)-\varphi(\theta)|<\delta(\varepsilon)$，$|G(t_0,\varphi)-G(\tilde{t}_0,\tilde{\varphi})|<\delta(\varepsilon)$ 时，方程 (1.1) 过 $(\tilde{t}_0,\tilde{\varphi})$ 的解于 $[\tilde{t}_0,t_0+A]$ 上存在且于其上满足 $|x(t;t_0,\varphi)-x(t;\tilde{t}_0,\tilde{\varphi})|<\varepsilon$.

证　如若不然，则存在 $\varepsilon_0>0$ 及序列 $t_{0k}\geqslant t_0$，$\varphi_k\in BC((-\infty,0],\mathscr{D})$，$t^k\in[t_{0k},t_0+A]$ 满足：$0\leqslant t_{0k}-t_0\leqslant\dfrac{1}{k}$，$\sup\limits_{t\leqslant 0}|\varphi_k(t)-\varphi(t)|<\dfrac{1}{k}$，

$$|G(t_{0k},\varphi_k)-G(t_0,\varphi)|<\frac{1}{k},$$

$|x_k(t^k;t_{0k},\varphi_k)-x(t^k;t_0,\varphi)|\geqslant\varepsilon_0$（其中 $x_k(t;t_{0k},\varphi_k)$ 表 (1.1) 过 (t_{0k},φ_k) 之解），且 $|x_k(t;t_{0k},\varphi_k)-x(t;t_0,\varphi)|<\varepsilon_0$ 对 $t_{0k}\leqslant t\leqslant t^k$ 成立.

不妨设 $A<r_2$，$t^k\to\bar{t}\in[t_0,t_0+A]$. 定义

$$y_k(t)=\begin{cases}x_k(t;t_{0k},\varphi_k), & t\in[t_{0k},t^k]\\ \varphi_k(0), & t\in[t_0,t_{0k}]\\ x_k(t^k;t_{0k},\varphi_k), & \text{当}\ t^k<\bar{t},\ t\in[t^k,\bar{t}]\ \text{时}.\end{cases}$$

若 y_k 不等度连续，则存在 $s_k\in[t_{0k},t^k]$，序列 $\Delta_k\to 0^+$ 及常数 $\varepsilon_1>0$，使 $|y_k(s_k)-y_k(s_k-\Delta_k)|\geqslant\varepsilon_1$（如有必要，取子序列）. 令 $s_k^*=\inf\{s\in[t_{0k},t^k];\ |y_k(s)-y_k(s-\Delta_k)|\geqslant\varepsilon_1\}$，则

$$|y_k(s_k^*)-y_k(s_k^*-\Delta_k)|\geqslant\varepsilon_1 \tag{1.4}$$

取定 $u>0$，使 $\sup\limits_{t_0\leqslant t,s\leqslant t_0+A}K_2(t,s,u)<\dfrac{1}{4}$. 再取正整数 K，使当 $k\geqslant K$ 时，$K_3(s_k^*,s_k^*-\Delta_k,u)<\dfrac{\varepsilon_1}{4}$，$\displaystyle\int_{s_k^*-\Delta_k}^{s_k^*}m(s)ds<\frac{\varepsilon_1}{4}$，且

$$\begin{aligned}\sup_{-\max\{r_1,u\}\leqslant\theta\leqslant 0}&\{|\varphi_k(s_k^*+\theta-t_{0k})-\varphi(s_k^*+\theta-t_{0k})|+|\varphi(s_k^*+\theta-t_{0k})\\&-\varphi(s_k^*+\theta-t_{0k}-\Delta_k)|+|\varphi(s_k^*+\theta-t_{0k}-\Delta_k)-\varphi_k(s_k^*+\theta\\&-t_{0k}-\Delta_k)|\}<\frac{\varepsilon_1}{4\max\{\sup\limits_{t_0\leqslant t,s\leqslant t_0+A}\{K_1(t,s),K_2(t,s,u)\}\}}.\end{aligned}$$

从而，由 (H_4) 知当 $k\geqslant K$ 时，

$$\begin{aligned}&|y_k(s_k^*)-y_k(s_k^*-\Delta_k)|\\&\leqslant K_1(s_k^*,s_k^*-\Delta_k)\sup_{-r_1\leqslant\theta\leqslant -r_2}\{|\varphi_k(s_k^*+\theta-t_{0k})-\varphi(s_k^*+\theta-t_{0k})|\\&\quad+|\varphi(s_k^*+\theta-t_{0k})-\varphi(s_k^*+\theta-t_{0k}-\Delta_k)|+|\varphi(s_k^*+\theta\\&\quad-t_{0k}-\Delta_k)-\varphi_k(s_k^*+\theta-t_{0k}-\Delta_k)|\}+K_2(s_k^*,s_k^*\\&\quad-\Delta_k,u)\sup_{-u\leqslant\theta\leqslant 0}|x_k(s_k^*+\theta)-x_k(s_k^*+\theta-\Delta_k)|+K_3(s_k^*,s_k^*\end{aligned}$$

$$-\Delta_k,\ u) + \left|\int_{s_k^*-\Delta_k}^{s_k^*} m(s)ds\right| < \varepsilon_1$$

这与(1.4)矛盾,故 $y_k(t)$ 于 $[t_0, \bar{t}]$上等度连续. 显然, $y_k(t)$于 $[t_0, \bar{t}]$ 上一致有界,故存在 y_k 之子列在$[t_0, \bar{t}]$上一致收敛于 $x^0(t)$. 不妨设 $y^k(t) \to x^0(t)$, 并令 $x_{t_0}^0 = \varphi$, 则在 $x_k(t;\ t_{0k},\ \varphi_k)$ 所满足的积分方程中取极限得

$$x^0(t) = \varphi(0) - G(t_0,\varphi) + G(t_0,\ x_t^0) + \int_{t_0}^t F(s,\ x_s^0)ds$$

即 $x^0(t) = x(t;\ t_0,\ \varphi)$, 从而当 k 充分大时, $|x_k(t^k;\ t_{0k},\ \varphi_k) - x(t^k;\ t_0,\ \varphi)| < \varepsilon_0$, 这与 $|x_k(t^k;\ t_{0k},\ \varphi_k) - x(t^k;\ t_0,\ \varphi)| \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾,证毕.

§2. 稳定性理论

为研究中立型方程的稳定性,文[6]引入了稳定D算子概念,其实质是把一个中立型方程的稳定性问题分离为一个"差分"方程和一个微分方程的稳定性问题, 而D算子的稳定性是联系这两类方程的桥梁. 如对中立型积分微分方程

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - \int_0^t E(t-s)x(s)ds\right] = Ax(t) + \int_0^t H(t-s)x(s)ds \qquad (2.1)$$

其中 $E, H \in C([0,\ \infty),\ R)$, A 为常数,通常关于

$$D(t,\ x_t) = x(t) - \int_0^t E(t-s)x(s)ds.$$

为稳定算子的一个判别法是 $\int_0^{+\infty}|E(t)|\,dt < 1$. 本节针对这类方程和 Ляпунов 第二方法的特点,引入关于某个楔函数稳定的D算子概念,依据这种概念,我们发现就(2.1)零解的渐近稳定性而言,只需 $\int_0^{+\infty}|E(t)|\,dt < +\infty$. 产生这种差别的原因是[6]引入的稳定$D$算子概念忽略了与中立型方程右端泛函的联系, 人为地把与中立型方程相关的"差分"方程、微分方程彼此独立开来,而这里引入的关于某个楔函数稳定的概念, 通过 Ляпунов 函数把"差分"方程与微分方程紧密联系起来. 事实上,D算子与右端泛函是密切相关的,这可以从下例中略见一斑.

系统 $\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_0^t H(t-s)x(s)ds$ 等价于中立型方程

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - \int_0^t E^*(t-s)x(s)ds\right] = A^*x(t) + \int_0^t H^*(t-s)x(s)ds,$$

其中 $A^* = A - E^*(0)$, $\dot{E}^*(t) + H^*(t) = H(t)$. 所以

$$D(t,\ x_t) = x(t) - \int_0^t E^*(t-s)x(s)ds$$

将随右端泛函 $A^*x(t) + \int_0^t H^*(t-s)x(s)ds$ 的变化而变化. [6]的稳定D算子概念将无法反映这种变化,因为它们定义的D算子稳定与否独立于方程右端泛函!

下面开始叙述本节结论. 考虑方程

$$\frac{d}{dt}D(t,\ x_t) = F(t,\ x_t) \qquad (2.2)$$

其中 $D(t, 0) = F(t, 0) = 0$. 我们总设对任意$(t_0, \varphi) \in [0,\infty) \times BC((-\infty, 0], R^n)$，存在(2.2)过 (t_0, φ) 的唯一解 $x(t; t_0, \varphi)$，若 $x(t; t_0, \varphi)$ 有界，则它可延拓至$+\infty$.本节所用其它记号、概念与稳定性定义，概与[9]、[10]相同.

定义 1　称泛函D关于楔函数W_3为稳定，若对任意 $t_0 \geq 0$, $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1(t_0, \varepsilon) > 0$，使对任意 $x \in C((-\infty, +\infty), R^n)$ 当 $\sup\limits_{t \geq t_0} |D(t, x_t)| < \delta_1(t_0, \varepsilon)$, $\|x\|^{(-\infty, t_0]} < \delta_1(t_0, \varepsilon)$, $\int_{t_0}^{+\infty} W_3(|x(s)|)ds < \delta_1(t_0, \varepsilon)$ 时，有 $|x(t)| < \varepsilon (t \geq t_0)$. 若 δ_1 与 t_0 无关，则称D关于 W_3 一致稳定.

若对任意有界连续函数 $x: R \to R^n$, 当 $\int_{t_0}^{+\infty} W_3(|x(s)|)ds < +\infty$ 时，

$$\lim_{t \to \infty} [D(t, x_t) - x(t)] = 0,$$

则称D关于W_3为拟渐近稳定. 若D关于W_3为稳定且拟渐近稳定，则称D关于 W_3 为渐近稳定.

定理 6　设存在连续 Ляпунов 泛函 $V(t, \varphi)$ 和楔函数 W_1, W_3, 使D关于 W_3 稳定且 $W_1(|D(t,\varphi)|) \leq V(t, \varphi)$, $V(t, 0) = 0$, $\dot{V}_{(2.2)}(t, \varphi) \leq -W_3(|\varphi(0)|)$.则方程(2.2)的零解稳定. 此外，若$D$关于$W_3$一致稳定且存在楔函数 W_2, 使

$$V(t, \varphi) \leq W_2(\|\varphi\|^{(-\infty, 0]}),$$

则 (2.2) 的零解为一致稳定.

证　对任给 $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$, 取 $\delta(t_0, \varepsilon) \in (0, \delta_1(t_0, \varepsilon))$, 使当$\|\varphi\|^{(-\infty, 0]} < \delta(t_0, \varepsilon)$时，$V(t_0, \varphi) < \min\{\delta_1(t_0, \varepsilon), W_1(\delta_1(t_0, \varepsilon))\}$. 记 $x(t) = x(t; t_0, \varphi)$, 则

$$W_1(|D(t, x_t)|) \leq V(t, x_t) \leq V(t_0, \varphi) - \int_{t_0}^{t} W_3(|x(s)|)ds$$

从而 $\sup\limits_{t \geq t_0} |D(t, x_t)| < \delta_1(t_0, \varepsilon)$, $\int_{t_0}^{+\infty} W_3(|x(s)|)ds < \delta_1(t_0, \varepsilon)$, 故由$D$关于 W_3 的稳定性知$|x(t)| < \varepsilon (t \geq t_0$时). 第二部分结论的证明可类似给出，证毕.

定理 7　设

(i): 对任给 $H > 0$, 存在 $L(H) > 0$, 使当$\|x\|^{(-\infty, t]} \leq H$时，$|F(t, x_t)| \leq L(H)$;

(ii): 存在非负连续 Ляпунов 泛函 $V(t, \varphi)$ 和楔函数 W_3, 使D关于 W_3 拟渐近稳定且 $\dot{V}_{(2.2)}(t, \varphi) \leq -W_3(|\varphi(0)|)$.

则对方程 (2.2) 的任意有界解 $x(t)$, 有$\underline{\lim}_{t \to \infty} x(t) = 0$. 此外，若 $V(t, 0) = 0$, D关于 W_3 渐近稳定且存在楔函数W_1,使$W_1(|D(t, \varphi)|), \leq V(t, \varphi)$,则(2.2)的零解为渐近稳定.

证　显然，对 (2.2) 的任意有界解 $x(t) = x(t; t_0, \varphi)$, 由 (ii) 得 $\lim\limits_{t \to \infty} |x(t)| = 0$. 若 $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) \neq 0$, 则存在常数 $\varepsilon_0 > 0$ 及序列 $\{t_n\}_1, \{s_n\}, t_n < s_n < t_{n+1}$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} t_n = +\infty$, 使 $|x(t_n)| = \varepsilon_0$, $|x(s_n)| = 4\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 < |x(t)| < 4\varepsilon_0$, $t \in (t_n, s_n)$. 又由 $\dot{V}_{(2.2)}(t, x_t) \leq -W_3(|x(t)|)$, 知 $\int_{t_0}^{+\infty} W_3(|x(s)|)ds < +\infty$, 故由$D$关于 W_3 的拟渐近稳定性知存在 $T_0 \geq t_0$, 使当 $t \geq T_0$ 时，$|D(t, x_t) - x(t)| \leq \varepsilon_0$. 选取正整数 N, 使当 $n \geq N$ 时，$t_n \geq T_0$, 因而

$$|D(t_n, x_{t_n})| \leqslant |x(t_n)| + |D(t_n, x_{t_n}) - x(t_n)| \leqslant 2\varepsilon_0,$$
$$|D(s_n, x_{s_n})| \geqslant |x(s_n)| - |D(s_n, x_{s_n}) - x(s_n)| \geqslant 3\varepsilon_0.$$

设 $|F(t, x_t)| \leqslant L$(L 之存在性由(i)保证), 则由 $|D(s_n, x_{s_n})| - |D(t_n, x_{t_n})| \leqslant L(s_n - t_n)$ 知 $s_n - t_n \geqslant \frac{\varepsilon_0}{L}$, 从而

$$\begin{aligned} V(s_n, x_{s_n}) &\leqslant V(t_N, x_{t_N}) - \sum_{k=N}^{n} \int_{t_k}^{s_k} W_3(|x(s)|)ds \\ &\leqslant V(t_N, x_{t_N}) - (n-N) W_3(\varepsilon_0) \cdot \frac{\varepsilon_0}{L} \\ &\to -\infty (n \to \infty \text{ 时}) \end{aligned}$$

这与 V 之非负性矛盾, 从而 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. 第二部分结论可从定理 6 及第一部分结论导出,证毕.

附注 不难证明,若关于 $\dot V_{(2.2)}(t, \varphi)$ 的不等式加强为

$$\dot V_{(2.2)}(t, \varphi) \leqslant -W_3(|\varphi(0)|) - \mu|F(t, \varphi)| (\mu > 0 \text{ 为常数}),$$

则定理 7 中 (i) 可去掉而结论不变(参见[10]).

定理 8 设对有界连续函数 $x: R \to R^n$, $D(t, x_t)$ 有界; 且设存在一个连续 Ляпунов 泛函 $V(t, \varphi)$, $W_1 \in C([0, \infty), R)$, $W_1(0) = 0$ 和楔函数 W_3, 使 D 关于 W_3 为拟渐近稳定, $W_1(|D(t, \varphi)|) \leqslant V(t, \varphi)$, $\dot V_{(2.2)}(t, \varphi) \leqslant -W_3(|\varphi(0)|)$, 且存在 $t_0 \geqslant 0$, 使对任意 $\delta > 0$, 总存在 $\varphi \in BC((-\infty, 0], R^n)$, $\|\varphi\|^{(-\infty,0]} < \delta$, 使 $V(t_0, \varphi) < 0$. 则(2.2) 的零解不稳定.

证 若 (2.2) 的零解稳定, 则存在 $\delta(t_0) > 0$, 使当 $\|\varphi\|^{(-\infty,0]} < \delta(t_0)$, $t \geqslant t_0$ 时, $|x(t; t_0, \varphi)| < 1$. 选 φ, 使 $\|\varphi\|^{(-\infty,0]} < \delta(t_0)$, $V(t_0, \varphi) < 0$. 记 $x(t) = x(t; t_0, \varphi)$.

若 $\int_{t_0}^{+\infty} W_3(|x(s)|)ds < +\infty$, 则由 D 关于 W_3 的拟渐近稳定性得 $\lim\limits_{t\to\infty} [D(t, x_t) - x(t)] = 0$. 另一方面

$$W_1(|D(t, x_t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant V(t_0, \varphi) < 0,$$

故存在 $r > 0$, 使 $|D(t, x_t)| \geqslant r$, 因而对充分大的 t, 有 $|x(t)| \geqslant \frac{r}{2}$, 这与

$$\int_{t_0}^{+\infty} W_3(|x(s)|)ds < +\infty$$

矛盾.

若 $\int_{t_0}^{+\infty} W_3(|x(s)|)ds = +\infty$, 则由 $\dot V_{(2.2)}(t, \varphi) \leqslant -W_3(|\varphi(0)|)$ 知

$$W_1(|D(t, x_t)|) \leqslant V(t_0, \varphi) - \int_{t_0}^{t} W_3(|x(s)|)ds \to -\infty \ (t \to \infty \text{时}),$$

这与 D 的有界性矛盾. 证毕.

作为上述结论的应用,考虑积分微分方程

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - \int_0^t G(t, s)x(s)ds\right] = Q(t)x(t) + \int_0^t C(t, s)x(s)ds \tag{2.3}$$

其中 $x\in R, G, C\in C(\{(s,t);\ 0\leqslant s\leqslant t<\infty\}, R)$, $Q\in C([0,\infty), R)$. 通常，对(2.3)所构造的 Ляпунов 泛函的导数是 x 的负定二次型，因此，我们先给出

$$D(t,\ x_t)=x(t)-\int_0^t G(t,s)x(s)ds$$

关于 x^2 稳定的判别准则.

引理 2.1　若

(i): $\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}\int_0^t|G(t,s)|ds=M<+\infty$, $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t<\infty}|G(t,s)|=N<+\infty$，则 D 关于 x^2 为一致稳定；

(ii): 若 (i) 成立且存在 $\beta:[0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$, $\beta(t)\leqslant t$,

$$\lim_{t\to\infty}\beta(t)=+\infty,\ 使\ \lim_{t\to\infty}\sup_{0\leqslant s\leqslant\beta(t)}|G(t,s)|=0.$$

则 D 关于 x^2 为渐近稳定.

证　(i): 应用 Schwartz 不等式，得

$$\left|\int_{t_0}^t G(t,s)x(s)ds\right|^2\leqslant\int_{t_0}^t|G(t,s)|ds\int_{t_0}^t|G(t,s)|x^2(s)ds$$
$$\leqslant MN\int_{t_0}^t x^2(s)ds$$

所以，若 $\int_{t_0}^{+\infty}x^2(s)ds<\delta_1(\varepsilon)$, $\sup\limits_{t\geqslant t_0}|D(t,x_t)|<\delta_1(\varepsilon)$, $\|x\|^{[0,t_0]}<\delta_1(\varepsilon)$,

$$\delta_1(\varepsilon)<\min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{1+M+\sqrt{MN}}\right)^2,\ 1,\right\}$$

则

$$|x(t)|\leqslant\left|\int_{t_0}^t G(t,s)\ x(s)ds\right|+|D(t,x_t)|$$
$$\leqslant\int_0^{t_0}|G(t,s)||x(s)|ds+\sqrt{MN\delta_1}+\delta_1<\varepsilon.$$

从而 D 关于 x^2 稳定.

(ii) 设有界连续函数 $x\in L^2[t_0,\infty)$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{\beta(t)}^{+\infty}x^2(s)ds=0$，因而由 Schwartz 不等式，得

$$\left(\int_0^t G(t,s)x(s)ds\right)^2$$
$$\leqslant M\left[\int_0^{\beta(t)}|G(t,s)|x^2(s)ds+\int_{\beta(t)}^t|G(t,s)|x^2(s)ds\right]$$
$$\leqslant M\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant\beta(t)}|G(t,s)|\int_0^{+\infty}x^2(s)ds+\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|G(t,s)|\int_{\beta(t)}^{+\infty}x^2(s)ds\right]$$
$$\to 0(t\to\infty\ 时)$$

故 D 关于 x^2 为拟渐近稳定，证毕.

显然，当 $G(t,s)=E(t-s)$ 时，只要 E 有界，$E\in L^1[0,\infty)$ 则 D 关于 x^2 稳定，若另有 $\lim\limits_{t\to\infty}E(t)=0$，则 D 关于 x^2 渐近稳定.

定理 9　设存在常数 $\gamma, J, K_1, K_2>0$，使

$$Q(t)+\nu^2\int_0^t|G(t,s)|ds\leqslant K_1,$$

$$1+\frac{1}{\nu^2}\int_0^t|C(t,s)|ds\leqslant K_2,$$

$$2Q(t)+|Q(t)|\int_0^t|G(t,s)|ds+\int_0^t|C(t,s)|ds$$

$$+K_1\int_t^{+\infty}|G(u,t)|du+K_2\int_t^{+\infty}|C(u,t)|du\leqslant -J \tag{2.4}$$

则当引理 2.1 的 (i) 成立时，(2.3) 的零解稳定；而当引理 2.1 之 (ii) 成立时，(2.3)的零解渐近稳定.

证 作 $V(t,x_t)=\left[x(t)-\int_0^t G(t,s)x(s)ds\right]^2+K_1\int_0^t\int_t^{+\infty}|G(u,s)|dux^2(s)ds$

$$+K_2\int_0^t\int_t^{+\infty}|C(u,s)|dux^2(s)ds,$$

则应用 Schwartz 不等式可证得

$$\dot V_{(2.3)}(t,x_t)\leqslant\Big[2Q(t)+|Q(t)|\int_0^t|G(t,s)|ds+\int_0^t|C(t,s)|ds$$

$$+K_1\int_t^{+\infty}|G(u,t)|du+K_2\int_t^{+\infty}|C(u,t)|du\Big]x^2(t)$$

$$+|Q(t)|\int_0^t|G(t,s)|x^2(s)ds+\nu^2\int_0^t|G(t,s)|ds\int_0^t|G(t,s)|x^2(s)ds$$

$$-K_1\int_0^t|G(t,s)|x^2(s)ds+\int_0^t|C(t,s)|x^2(s)ds$$

$$+\frac{1}{\nu^2}\int_0^t|C(t,s)|ds\int_0^t|C(t,s)|x^2(s)ds$$

$$-K_2\int_0^t|C(t,s)|x^2(s)ds\leqslant -Jx^2(t)$$

其中利用了

$$\left|2\int_0^t G(t,s)x(s)ds\int_0^t C(t,s)x(s)ds\right|\leqslant\nu^2\left(\int_0^t G(t,s)x(s)ds\right)^2$$

$$+\nu^{-2}\left(\int_0^t C(t,s)x(s)ds\right)^2$$

故由定理 6，定理 7，引理 2.1 即证本定理，证毕.

定理 10 若将 (2.4) 改为

$$-2Q(t)+|Q(t)|\int_0^t|G(t,s)|ds+\int_0^t|C(t,s)|ds$$

$$+K_1\int_t^{+\infty}|G(u,t)|du+K_2\int_t^{+\infty}|C(u,t)|du\leqslant -J,$$

而定理 9 其余条件不变，且

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_0^t\int_t^{+\infty}[|G(u,s)|+|C(u,s)|]duds<\infty,$$

则 (2.3) 的零解不稳定.

证 作 $V(t,x_t)=-\left[x(t)-\int_0^t G(t,s)x(s)ds\right]^2$

$$+K_1\int_0^t\int_t^{+\infty}|G(u,s)|dux^2(s)ds$$
$$+K_2\int_0^t\int_t^{+\infty}|C(u,s)|dux^2(s)ds$$

同上计算，可得 $\dot{V}_{(2.3)}(t,x_t)\leqslant -Jx^2(t)$，从而由定理 8 及推论 2.1 即证本定理，证毕.

注　当 $C(t,s)\equiv 0$ 时，即得[8]的定理 4 与[9]定理 5.2.2 所讨论的方程，但我们分别去掉了它们的条件

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_0^t|G(t,s)|ds<1 \text{ 与 } 2\sup_{t\geqslant 0}|Q(t)+G(t,t)|$$
$$+2\sup_{t\geqslant 0}\left[\int_0^t|C^*(t,s)|ds+\int_t^{+\infty}|C^*(u,t)|du\right]<+\infty,$$

且得到渐近稳定的结论$\left(\text{其中 } C^*(t,s)=\dfrac{\partial}{\partial t}G(t,s)\right)$.

本文得到李森林教授的鼓励和王志成教授的指导，谨此致谢.

参　考　文　献

[1] 吴建宏，无穷时滞中立型泛函微分方程的局部理论，应用数学学报，**8**: 4(1985)，472—481.
[2] 吴建宏，某类泛函微分方程族的局部理论及其应用，数学年刊（A 辑），**7**: 2(1986)，189—200.
[3] Wang Zhicheng and Wu Jianhong (王志成、吴建宏), Neutral functional differential equations with infinite delay, *Funkcialaj Ekvac.*, **28**: 3(1985), 157—170.
[4] F. Kappel and W. Schappacher, Some considerations to the fundamental theory of infinite delay equations, *J. D. E.*, **37**: 2(1980), 141—183.
[5] J. K. Hale and J. Kato, Phase space for retarded equations with infinite delay, *Funkcialaj Ekvac.*, **21** (1978), 11—41.
[6] M. A. Cruz and J. K. Hale, Stability of functional differential equations of neutral type, *J. D. E.*, **7**(1970), 334—355.
[7] J. K. Hale, Forward and backward continuation for neutral functional differential equations, *J. D. E.*, **9** (1971), 168—181.
[8] T. A. Burton and W. E. Mahfoud, Stability criteria for Volterra equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **279** (1983), 143—184.
[9] T. A. Burton, Volterra Integral and Differential Equations, Academic Press, 1983.
[10] 黄启昌：具无限时滞的泛函微分方程的解的一致性态，东北师大学报(自然科学版)，**1**(1984)，13—25.